##### Bilag om approksimationer og Taylorpolynomier

For at kunne arbejde med matematiske udtryk i en matematisk model er det ofte nødvendigt at lave approksimationer. Når vi laver en model af verden er det altid en forsimpling, hvilket gør det muligt at arbejde med den. Når vi behandler modellen matematisk er approksimationer et effektivt værktøj. Det er en meget brugt teknik i fysik, som ellers bliver betragtet som en eksakt videnskab. Vi vil se på en systematisk måde at lave approksimationer på, ved at bruge rækkeudvikling.

Hvis vi har en funktion som vi gerne vil approksimere når er lille, er proceduren:

* Omskriv så
* Skriv funktionen som et polynomium.
* Vælg graden i forhold til hvor præcis approksimationen skal være.

**Eksempel**

Vi vil gerne undersøge funktionen for , overvej hvorfor det ikke virker med .

Her er første skridt med at omskrive så er lille gjort på forhånd. Vi opskriver funktionen som et polynomium

Det er en serie som fortsætter uendeligt, men heldigtvis bliver biddragene mindre og mindre, da .

Figur xx venstre viser funktionen, med de tre første led i polynomiet in intervallet og højre i intervallet . Det ses at approksimationen bliver bedre når man tager flere led med, men at det kun er 1. ordens biddraget som adskiller sig når .

|  |  |
| --- | --- |
| Figur:Chart, line chart  Description automatically generated | Chart, line chart  Description automatically generated |

Det er en konkret afvejning hvor mange led man skal tage med i forhold til hvor præcist resultat men vil have og hvor stor er.

**Øvelse**

Undersøg de fire funktioner grafisk ved at plotte venstre side sammen med approksimationerne, hvor I tager flere og flere led med.



Hvordan gør man lille?

Det kommer ofte an på konteksten hvorvidt vi kan betragte som værende lille. Hvis vi kan omskrive funktionen så vi får en brøk med et stort tal i nævneren så har vi et lille , brøken.

**Eksempel**

Hvis vi skal se hvordan tyngdekraften ændrer sig når vi kører op i verdens højeste bygning, Burj Khalifa, på 828m har vi brug for Newtons tyndgelov. Newtons tyngdelov siger at tiltrækningen mellem to objekter med masserne, og , er omvendt proportional med afstanden i anden. Proportionalitetskonstanten kaldes gravitationskonstanten, . Skrevet på formelsprog . Hvis vi kun er interesseret i ændringen kan vi skrive at , hvor vi har gemt alle konstanterne i .

Jordens radius er i gennemsnit og tyngdekraften ved højden, over jordoverfladen kan skrives som

Hvis vi kigger på forholdet giver det

Selv i Burj Khalifa er og vi kan lave en approksimation af

Hvis vi tager de to første led med kan vi se at

mens en tur på Mount Everest, 8849m, giver en relativ tungdekraft på

Ens rygsæk bliver altså ikke synderligt lettere af at klatre op på Mount Everest, desværre.

##### Taylor polynomier

Når man finder polynomier til at approksimere en funktion, siger man at man rækkeudviklier funktionen. Dette gøres med Taylors teorem som siger, at en funktion som er differentiabel kan approksimeres med et Taylor polynomium.

Taylor polynomiet er givet ved.

|  |
| --- |
| Definition: Taylor polynomium.  Et billede, der indeholder bord  Automatisk genereret beskrivelse |
| Kilde: https://da.wikipedia.org/wiki/Taylorpolynomium |

Hvis vi ser på de første to led, så svarer de bare til tangentligningen i punktet . Derefter kommer 2., 3., 4. grads leddene, og man kan se det som en generalisering af tangenten som approksimation. For at opskrive taylor polynomiet skal man differentiere funktionen og sætte værdien ind.

**Eksempel**

Det simpleste at differentiere er den naturlige eksponentialfunktion hvor . Vi kan finde rækkeudviklingen ved,

Hvilket er rækken vist ovenfor.

I CAS programmer kan man skrive taylor(f(x),x=0,6) hvis man vil have de første seks led i taylorudviklingen.

**Øvelse**. Vis rækkeudviklingen for funktionerne